| الدورة الإستثنائية للعام<br>2009 | امتحانات شهادة الثانوية العامة<br>الفرع : العلوم العامة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الفيزياء<br>المدة: ثلاث ساعات | |

**Cette épreuve est formée de quatre exercices répartis sur quatre pages numérotées de 1 à 4.**
**L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.**

## <u>Premier exercice</u> (7,5 points)

### Interférences lumineuses

On considère le dispositif des fentes de Young représenté par la figure 1 ci-contre. $S_1$ et $S_2$ sont distantes de a = 1mm.
Les plans (P) et (E) sont distants de D = 1m. I est le milieu de $S_1S_2$ et O la projection orthogonale de I sur (P). Sur la perpendiculaire à IO au point O et parallèlement à $S_1S_2$, un point M est repéré par son abscisse OM = x.

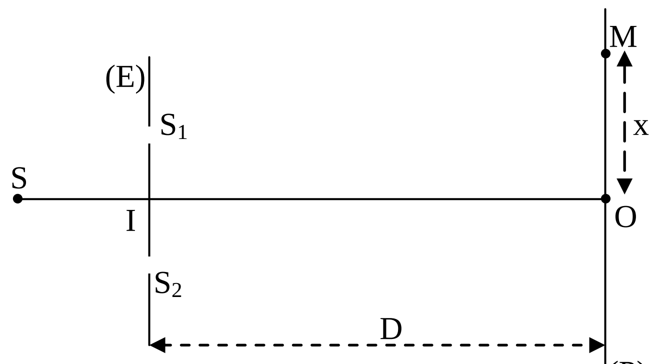


Fig. 1

**1)** $S_1$ et $S_2$, éclairées par deux lampes, émettent des radiations synchrones. Observe-t-on des interférences lumineuses sur l'écran ? Pourquoi ?

**2)** $S_1$ et $S_2$ sont éclairées par une source ponctuelle S située sur IO. S émet une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda$ dans le vide (ou dans l'air).

- **a)** La frange obtenue en O est-elle brillante ou sombre ? Pourquoi?
- **b)** Donner l'expression, au point M, de la différence de marche optique $\delta$ entre deux radiations issues de S, l'une passant par $S_1$ et l'autre par $S_2$, en fonction de D, a et x.
- **c)** Établir la relation donnant les abscisses des centres des franges brillantes et celle donnant les abscisses des centres des franges sombres.
- **d)** Pour x = 2,24 mm, M est situé au centre de la quatrième frange brillante (frange brillante d'ordre 4). Calculer $\lambda$.

**3)** La source S émet maintenant de la lumière blanche.

- **a)** En O, on observe une lumière blanche. Pourquoi?
- **b)** Calculer les longueurs d'onde des radiations visibles auxquelles il correspond en M, d'abscisse OM = x = 2,24mm, des franges sombres.
  **Spectre visible** : $0,400\ \mu m \leq \lambda \leq 0,800\ \mu m$.

## <u>Deuxième exercice</u> (7,5 points)

### Détermination de la période du Polonium 210

Le polonium 210 ( $^{210}_{84}Po$ ), émetteur $\alpha$, est le seul isotope du polonium que l'on trouve dans la nature ; il a été trouvé dans un minerai par Pierre Curie en 1898. Il provient aussi de la désintégration du noyau de bismuth 210 ( $^{210}_{83}Bi$ ).

Masses des noyaux : m (Bi) = 209,938445 u ; m(Po) = 209,936648 u
masse de l'électron : $m_e$ = 0,00055 u
1 u = 931,5 MeV / $c^2$ = 1,66 $10^{-27}$ kg.

Extrait du tableau périodique des éléments : $_{81}Th$ ; $_{82}Pb$ ; $_{83}Bi$ ; $_{84}Po$ ; $_{85}At$ ; $_{86}Rn$ .

**A – Le polonium 210**

1) **a)** Écrire l'équation de la désintégration du bismuth 210.
   **b)** Identifier la particule émise et préciser le type de cette désintégration.
2) Calculer l'énergie libérée par cette désintégration.
3) La désintégration du noyau de bismuth 210 est accompagnée par l'émission d'un photon $\gamma$ d'énergie $E(\gamma) = 0,96$ MeV et d'un antineutrino d'énergie 0,02 MeV. Sachant que le noyau fils est pratiquement immobile, calculer l'énergie cinétique de la particule émise.

**B – Demi – vie du polonium 210**

1) **a)** Écrire l'équation de la désintégration du polonium 210.
   **b)** Identifier le noyau fils.
2) Pour déterminer la période radioactive T du $^{210}_{84}Po$ , on considère un échantillon de cet isotope contenant, à la date $t_o = 0$, $N_o$ noyaux. Soit N le nombre des noyaux non désintégrés à une date t.
   **a)** Écrire l'expression illustrant la loi de décroissance radioactive.
   **b)** Déterminer l'expression de la fonction $-\ell n\left(\frac{N}{N_0}\right)$ en fonction de t .
3) Un compteur fournit les mesures groupées dans le tableau suivant :

| t (jours) | 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{N}{N_0}$ | 1 | 0,82 | 0,67 | 0,55 | 0,45 | 0,37 | 0,30 |
| $-\ell n\left(\frac{N}{N_0}\right)$ | 0 | | 0,4 | | 0,8 | | 1,2 |

   **a)** Compléter le tableau.
   **b)** Tracer, sur le papier millimétré, la courbe donnant les variations de $-\ell n\left(\frac{N}{N_0}\right)$ en fonction du temps.

   **Échelle** : 1 cm en abscisses correspond à 40 jours.
   1 cm en ordonnées correspond à 0,2.

   **c)** Cette courbe est – elle en accord avec l'expression trouvée dans la question (B – **2**, b) ? Justifier.
   **d)** **i)** Calculer la pente de la courbe tracée.
   **ii)** Que représente cette pente pour le noyau de polonium 210 ?
   **iii)** Déduire la valeur de T.

## Troisième exercice (7,5 points)

## Échanges d'énergie

On réalise le montage d'un circuit constitué d'un conducteur ohmique de résistance R = 2,2 kΩ, d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E = 8 V, d'une bobine d'inductance L = 0,8 H et de résistance négligeable et d'un conducteur ohmique de résistance réglable r et de deux interrupteurs $K_1$ et $K_2$ (Fig.1).

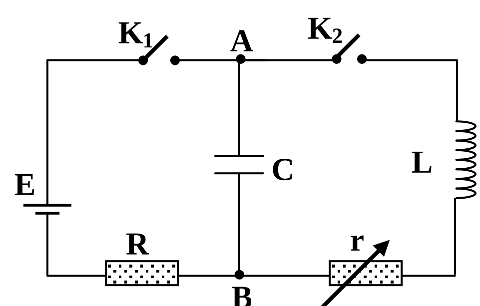


**Fig. 1**

**A – Circuit série (RC)**

À un instant pris comme origine des temps ($t_0 = 0$), on ferme l'interrupteur $K_1$, $K_2$ restant ouvert.
On étudie la charge du condensateur en suivant l'évolution de la tension $u_{AB} = u_C$ en fonction du temps.

1) Montrer que l'équation différentielle en $u_C$ est : $E = u_C + RC\frac{du_C}{dt}$ .

2) Sachant que $u_C = E(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$ est solution de cette équation différentielle, déterminer l'expression de la constante de temps τ en fonction de R et C.
3) La courbe de la figure 2 donne les variations de $u_C$ en fonction du temps. En se servant de cette courbe, déterminer la constante de temps τ (indiquer la méthode employée).
4) Calculer le valeur de C.
5) **a)** Donner, en ms, la durée $t_1$ au bout de laquelle on peut pratiquement considérer que la tension aux bornes du condensateur ne varie plus.
**b)** Calculer la charge du condensateur et l'énergie $W_0$ qu'il a emmagasinée au bout de la durée $t_1$.

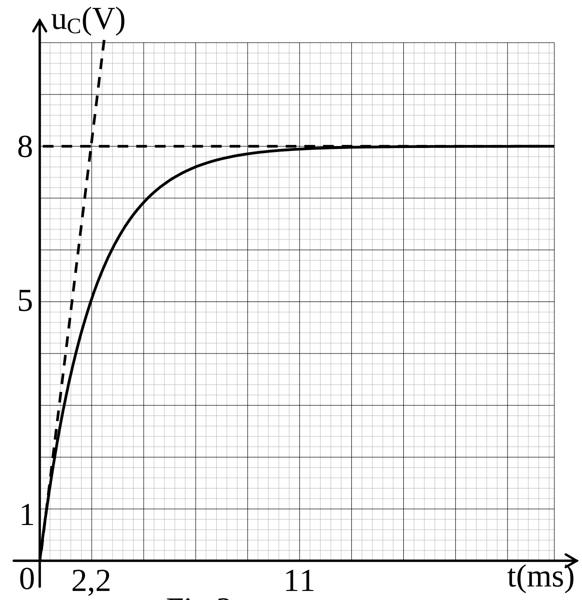


Fig.2

**B – Circuit série (L,C)**

On donne à r la valeur zéro. La tension aux bornes du condensateur est 8 V. À un instant choisi comme origine des temps ( $t_0 = 0$), on ouvre l'interrupteur $K_1$ et on ferme l'interrupteur $K_2$.

1) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_C$ en fonction du temps.
2) Le circuit est le siège d'oscillations électriques de période propre $T_0$. La solution de cette équation différentielle est : $u_C = E\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$.
Déterminer la valeur de $T_o$ .
3) Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de $u_C$ en fonction du temps.
4) Préciser les échanges énergétiques qui ont lieu dans le circuit.

**C – Circuit (r, L, C) série**

On donne à r une certaine valeur. La tension aux bornes du condensateur est de 8 V. On ouvre $K_1$ et on ferme $K_2$ à la date $t_0 = 0$. L'oscillogramme de la figure 3 donne les variations de la tension $u_C$ en fonction du temps.

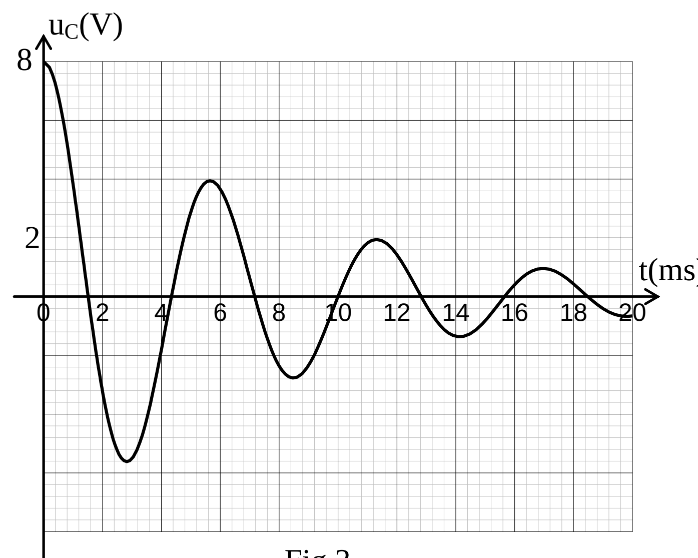


Fig.3

1) Préciser les échanges énergétiques qui ont lieu dans le circuit.
2) **a)** En se référant à la figure 3, trouver la pseudo-période T des oscillations électriques.
**b)** Comparer T et $T_0$.
3) Au bout de la durée $t_n = nT$ ( n étant un nombre entier), l'énergie dissipée par effet Joule est de 98,6 % de l'énergie $W_0$ initialement emmagasinée dans le condensateur.
**a)** À la date $t_n = nT$, l'énergie emmagasinée dans le circuit est seulement électrique. Pourquoi ?
**b)** On désigne par $W_0$ et $W_n$ l'énergie électrique de l'oscillateur aux instants respectifs $t_0$ et $t_n$ . Calculer $W_n$.
**c)** Déterminer n.

## <u>Quatrième exercice</u> (7,5 points)

### Pendule pesant

Le but de cet exercice est d'étudier les variations de la période propre T d'un pendule pesant en fonction de la distance a, de valeur réglable, séparant l'axe d'oscillation du centre d'inertie de ce pendule, et de mettre en évidence quelques propriétés associées à cette distance a .

On dispose alors d'un disque (D) homogène de masse m = 200g, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (Δ) perpendiculaire à son plan et passant par un point O (Fig. 1).

$I_0$ est le moment d'inertie de (D) par rapport à l'axe ($\Delta_0$) parallèle à ($\Delta$) et passant par son centre d'inertie G et I son moment d'inertie par rapport à l'axe ($\Delta$), ($\Delta_0$) étant distant de ($\Delta$) de a = OG, tel que : $I = I_0 + ma^2$.

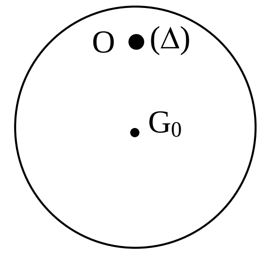



Fig 1

On prend comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal passant par le centre d'inertie $G_0$ de (D) lorsque (D) est dans sa position d'équilibre stable (Fig.1).

(D) est mis en oscillation autour de ($\Delta$) et on mesure la valeur de la période propre correspondant à chaque valeur de a.

**Prendre** : $g = 10\ m/s^2$ ; $\pi^2 = 10$ ;

pour les angles faibles ($\theta$ en radian); $1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin\theta = \theta$.

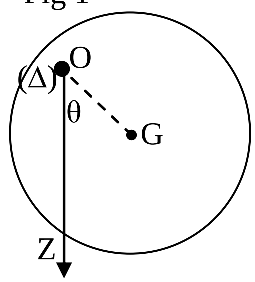



Fig 2

**A – Étude théorique**

On écarte (D) d'un angle $\theta_m$ faible à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse à la date $t_0 = 0$. (D) oscille alors autour de l'axe ($\Delta$) avec une période propre T.

À une date t, l'abscisse angulaire du pendule est $\theta$ et sa vitesse angulaire est $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ (Fig.2).

**1)** Écrire, à la date t, l'expression de l'énergie mécanique du système ( pendule, Terre ) en fonction de I, m, a, g, $\theta$ et $\theta'$.

**2)** **a)** Établir l'équation différentielle du second ordre en $\theta$ qui régit le mouvement de (D).

**b)** Déduire que l'expression de la période T de ce pendule s'écrit : $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$.

**3)** $T_1$ et $T_2$ sont respectivement les périodes du pendule quand il oscille autour de ($\Delta$) qui passe successivement par $O_1$ et $O_2$ où $O_1G = a_1$ et $O_2G = a_2$. Les oscillations sont de même période ( $T_1 = T_2$ ). $I_1$ et $I_2$ sont respectivement les moments d'inertie du pendule par rapport à ($\Delta$) qui passe successivement par $O_1$ et $O_2$ .

**a) i)** Trouver la relation entre $I_1$, $I_2$, $a_1$ et $a_2$.

**ii)** Déduire que $I_0 = m\, a_1 a_2$.

**b)** La période propre T' d'un pendule simple de longueur $\ell$, pour des oscillations de faible amplitude, a pour expression $T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Montrer que, lorsque la valeur de T' est égale à celle de $T_1$ , on a $\ell = a_1 + a_2$.

**B – Étude expérimentale**

Pour chaque valeur de a, on mesure la valeur de T . Les mesures effectuées permettent de tracer la courbe donnant les variations de T en fonction de a. La droite d'équation T = 1,1 s coupe cette courbe en deux points A et B. (Fig. 3).

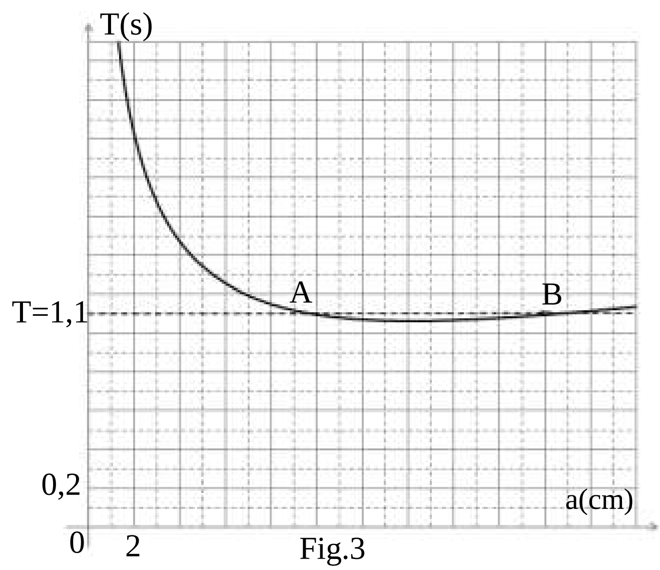



Fig.3

**1)** **a)** En se référant au graphique, donner les valeurs de $a_1$ et $a_2$ correspondant à la période T = 1,1 s.

**b)** Déduire la valeur de $I_0$ et celle de $\ell$.

**2)** D'après le graphique de la figure 3, T prend une valeur minimale ($T_{min}$ = 1,05 s) pour une certaine valeur a' de a.

**a)** Donner, à partir du graphique, la valeur a' correspondant à $T_{min}$.

**b)** Retrouver, par le calcul, les valeurs de a' et $T_{min}$.

## Premier exercice

1) On ne peut pas observer des franges d'interférences puisque les deux sources sont synchrones mais pas cohérentes. **(½)**

2) **a)** La frange en O est brillante puisque la différence de marche en O est nulle = $(SS_1 + S_1O) - (SS_2 + S_2O) = 0$ ; les deux vibrations lumineuses atteignent O en phase. **(¾)**

**b)** $\delta = \frac{ax}{D}$ **(½)**

**c)** Franges brillantes : $\delta = k\lambda \Rightarrow \frac{ax}{D} = k\lambda \Rightarrow x = k\frac{\lambda D}{a}$

Franges obscures : $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{ax}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda D}{2a}$ **(1½)**

**d)** $OM = x = 4i = 4\frac{\lambda D}{a}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{ax}{4D} = \frac{1 \times 2{,}24}{4 \times 10^3} = 0{,}56 \times 10^{-3}$ mm = 560 nm **(1¼)**

3) **a)** Toutes les radiations donnent en O frange brillante donc c'est la superposition de toutes les couleurs $\Rightarrow$ tache lumineuse blanche. **(1)**

**b)** $\frac{ax}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2ax}{(2k+1)D} = \frac{2 \times 1 \times 2{,}24}{(2k+1) \times 10^3} =$

$\frac{4{,}48 \times 10^{-3}}{(2k+1)}$ mm $= \frac{4{,}48}{(2k+1)}$ µm

$0{,}4\mu m \leq \lambda_V \leq 0{,}8\mu m \Rightarrow 0{,}4 \leq \frac{4{,}48}{(2k+1)} \leq 0{,}8 \Rightarrow 5{,}6 \leq (2k+1) \leq 11{,}2 \Rightarrow (2k+1)$

$\in \{7, 9, 11\}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (2k + 1) | 7 | 9 | 11 |
| λµm | 0,64 | 0,497 | 0,407 |

**(2)**

## Deuxième exercice

**A – 1) a)** ${}^{210}_{83}Bi \rightarrow {}^{210}_{84}Po + {}^{a}_{z}X$

Lois de conservation : $210 = a + 0 \Rightarrow a = 0$

$83 = 84 + z \Rightarrow z = -1$ **(½)**

**b)** La particule émise est un électron ${}^{0}_{-1}e$ ; ${}^{210}_{83}Bi$ est émetteur $\beta^{-1}$ **(¼)**

**2)** $E_{libérée} = \quad m \times c^2$ ou $\quad m$ est le défaut de masse

$\Delta m = m_{av} - m_{ap} = m(Bi) - m(Po) - m(e)$

$\Delta m = 209{,}938445\ u - 209{,}936648\ u - 0{,}00055\ u = 1{,}247 \times 10^{-3}\ u$

$E_{lib} = 1{,}247 \times 10^{-3} \times 931{,}5 \frac{MeV}{c^2} \times c^2 = 1{,}16$ MeV. **(1)**

**3)** $E_{lib} = E(Po) + E(\ ) + E(e^-) + E(\ )$

$\Rightarrow E_c = E(e) = 1{,}16 - 0{,}96 - 0{,}02 = 0{,}18$ MeV **(¾)**

**B – 1) a)** ${}^{210}_{84}Po \quad {}^{A}_{Z}X + {}^{4}_{2}He$

Lois de conservation : $210 = A + 4 \Rightarrow A = 206$

$84 = Z + 2 \Rightarrow Z = 82$ **(½)**

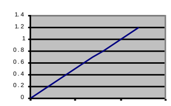
**b)** ${}^{a}_{z}X$ est le ${}^{206}_{82}Pb$ **(¼)**

**2) a)** $N = N_o e^{-\lambda t}$ où λ est la constante radioactive de ${}^{a}_{z}X$ **(½)**

**b)** $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \quad \ell n(\frac{N}{N_0}) = -\lambda t \Rightarrow -\ell n(\frac{N}{N_0}) = \lambda t$ **(½)**

**3) a)** Les valeurs qui manquent sont : 0,20 ; 0,60 ; 1 **(½)**

**b) (1¼)**



**c)** La courbe est une droite qui passe par l'origine elle est en accord avec $-\ell n(\frac{N}{N_0}) = \lambda t$. **(¼)**

**d) i)** $\lambda = \frac{0{,}6}{120} = 5 \quad 10^{-3}$ jour $^{-1}$ **(½)**

**ii)** La pente de cette courbe est la constante radioactive λ du polonium 210. **(¼)**

**iii)** $T = \frac{\ell n2}{\lambda} = 138{,}6$ jours. **(½)**

**Troisième exercice**

**A – 1)** $E = u_C + Ri$, $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ ainsi : $E = u_C + RC\dfrac{du_C}{dt}$ **(½)**

**2)** $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow E = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + RC\dfrac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$

$\dfrac{RC}{\tau} = 1 \Rightarrow \tau = RC.$ **(¾)**

**3)** À l'instant $t = \tau$, $u_c = 0{,}63E = 0{,}63 \times 8 = 5{,}04$ V,

graphiquement on trouve : $t = \tau = 2{,}2$ ms pour $u_c = 5{,}04$ V. **(½)**

**4)** $\tau = RC = 2{,}2 \times 10^{3} = 2{,}2 \times 10^{-3} \Rightarrow C = 10^{-6}F = 1\ \mu F.$ **(½)**

**5) a)** Au bout de $t_1 = 5\tau = 11$ ms. **(¼)**

**b)** $Q = CE = 8 \times 10^{-6}$ C ; $W_0 = ½ CE^2 = 32 \times 10^{-6}$ J. **(1)**

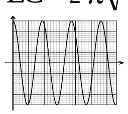
**B – 1)** $u_C = L\dfrac{di}{dt}$, $i = -\dfrac{dq}{dt} = -C\dfrac{du_C}{dt}$, ainsi : $u_C = -LC\ddot{u}_C \Rightarrow u_C + LC\ddot{u}_C = 0$ **(½)**

**2)** $u_C = E\cos(2\pi/T_0)t \Rightarrow \dot{u}_C = -E(\dfrac{2\pi}{T_0})\sin(2\pi/T_0)t$

$\Rightarrow \ddot{u}_C = -E(2\pi/T_0)^2\cos(2\pi/T_0)t$ ;

En remplaçant $u_C$ et $\ddot{u}_C$ dans l'équation différentielle , il vient : $E\cos(2\pi/T_0)t - LCE(2\pi/T_0)^2\cos(2\pi/T_0)t = 0 \Rightarrow 1 - LC(2\pi/T_0)^2 = 0$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{0{,}8 \times 10^{-6}} = 5{,}62$ ms. **(¾)**

**3)**  **(¼)**

**4)** L'énergie (électrique) $W_0$ du condensateur passe, à la bobine qu'elle emmagasine sous forme d'énergie magnétique et vice versa. **(¼)**

**C – 1)** L'énergie (électrique) $W_0$ du condensateur passe en partie à la bobine qu'elle emmagasine sous forme d'énergie magnétique et le reste se dissipe sous forme d'énergie thermique par effet Joule. **(¼)**

**2) a)** $3T = 17$ ms $\Rightarrow T = 5{,}67$ ms **(¼)**

**b)** T est légèrement supérieure à $T_0$. **(¼)**

**3) a)** Car $u_C$ est max. $\Rightarrow i = 0 \Rightarrow W_{mag.} = 0 \Rightarrow$ énergie du circuit = énergie électrique **(¼)**

**b)** $W_n = 0{,}014\ W_0 \Rightarrow \dfrac{W_n}{W_0} = 0{,}014 \Rightarrow W_n = 0{,}014 \times 32 \times 10^{-6} = 0{,}448 \times 10^{-6}$ J. **(½)**

**c)** $W_n = ½ C u_n^2 \Rightarrow u_n = 0{,}95$ V . Le graphique donne $t = 17$ ms $= nT = n(5{,}62) \Rightarrow n = 3$ **(¾)**

**Quatrième exercice**

**A – 1)** $E_m = \dfrac{1}{2}I\theta'^2 + mga(1 - \cos\theta) = \dfrac{1}{2}I\theta'^2 + mga\dfrac{\theta^2}{2}$ **(¾)**

**2) a)** $\dfrac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow I\theta'\theta'' + mga\theta\theta' = 0;\ \theta' \neq 0 \Rightarrow \theta'' + \dfrac{mga}{I}\theta = 0$ **(½)**

**b)** $\theta'' + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \dfrac{mga}{I}$ ; puisque $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mga}}$. **(½)**

**3) a) i)** $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_1}{mga_1}}$ et . $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_2}{mga_2}}$ ; $T_1 = T_2 \Rightarrow \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$ **(½)**

**ii)** $\dfrac{I_0 + ma_1^2}{a_1} = \dfrac{I_0 + ma_2^2}{a_2} \Rightarrow I_0(a_2 - a_1) = ma_1a_2(a_2 - a_1) \Rightarrow I_0 = ma_1a_2$. **(¾)**

**b)** $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_1}{mga_1}}$ $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0 + ma_1^2}{mga_1}}$

$T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{ma_1a_2 + ma_1^2}{mga_1}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a_1 + a_2}{g}} \Rightarrow \ell = a_1 + a_2$. **(1)**

**B – 1) a)** $a_1 = 10$ cm et $a_2 = 20$ cm **(½)**

**b)** $I_0 = ma_1a_2 = 4\times10^{-3}$ kgm$^2$ ; $\ell = a_1 + a_2 = 30$ cm. **(1)**

**2) a)** À partir du graphique : $T_{min}$ pour a' = 14 cm . **(½)**

**b)** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0 + ma^2}{mga}}$ T est minimale si $\left(\dfrac{I_0}{mga} + \dfrac{a}{g}\right)$ est minimale or

$\dfrac{I_0}{mga} \times \dfrac{a}{g} = \dfrac{I_0}{mg^2} = Cte$

Donc T est minimale si

$\dfrac{I_0}{mga} = \dfrac{a}{g} \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{I_0}{m}} = 14{,}1$ cm $\Rightarrow a = 14{,}1$ cm $\Rightarrow T_{min} = 1{,}05$ s **(1½)**

Ou $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0 + ma^2}{mga}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{mg}}\sqrt{\dfrac{I_0}{a} + ma}$ = cte $\Rightarrow \dfrac{dT}{da} = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{2\pi}{\sqrt{mg}}\dfrac{(-\dfrac{I_0}{a^2} + m)}{2\sqrt{\dfrac{I_0}{a} + ma}} = 0 \Rightarrow I_0 = ma^2$